

szeretnénk külön megköszönni a szegedi Tanárképző Főiskola „Módszertani Közlemények” c. folyóirata szerkesztőségének, hogy számunkra a publikációs lehetőséget biztosította.

IRODALOM

- (1) Nagy, S.: Pedagógia. III. Az oktatás elmélete. Bp. 1962. 85—86. old.
- (2) Kontra, Gy.: Egészségtan az általános iskolák VIII. osztálya számára. 6. kiadás. Bp. 1963. 91—101. old.
- (3) Lipták, P.: Embertan és emberszármazástan. Szegedi JATE Természettudományi Kari jegyzet. Bp. 1964. 123—174. old.
- (4) Thoma, A.: A Homo sapiens kibontakozása. Anthropologia Hungarica. 5. kötet 1962.
- (5) Kontra, Gy.: Egészségtan az általános iskolák VIII. osztálya számára. 4. kiadás. Bp. 1961. 91—101. old.
- (6) Kontra, Gy.: Egészségtan az általános iskolák VIII. osztálya számára. 5. kiadás. Bp. 1962. 91—101. old.
- (7) Kontra, Gy.: Az emberi test. Bp. 1958. 1. kötet. 106—171. old.
- (8) Biológia a gimnáziumok III. osztálya számára. Bp. 1964.
- (9) Dezső, Gy.: Egy fiziológiai időpont meghatározási kísérlet budapesti serdülő fiúknál. Szakdolgozat. Bp. 1964. 1—12. old.



MŰHELY

ÉV VÉGI ISMÉTLÉS MATEMATIKÁBÓL AZ ÁLTALÁNOS ISKOLA VIII. OSZTÁLYÁBAN

Az általános iskola Matematika Tanterve a VIII. osztály végén 23 órát szán az általános iskolai anyag ismételtesére. A jelenleg érvényben levő tankönyv ehhez az ismétléshez nem nyújt segítséget.

A 23 óra anyagát 6 témára bontva dolgoztuk fel: A racionális szám, az összeadás, kivonás, szorzás, osztás, szöveges feladatok és a mértani anyag témaköreire.

A témák feldolgozására kétféle lehetőséget kínálunk.

1. Minden téma tanítható a tanulók maximális önállóságának igénybevételével, a kérdések alapján, úgy, hogy a kérdéssorozatot a tanulók litografálva kézhez kapják és felelnek azokra számfeladatok kidolgozásával, illetve röviden szóval.

2. A kérdéssorozat után közöljük a téma rövid összefoglalását. Ez az anyag összefoglaló-rendszerező órákon dolgozható fel a tanár irányításával.

Magunk a kérdéssorozatokkal kísérletezünk és az eredményről szeptemberben beszámolunk.

A feldolgozásban tekintettel voltunk az új Tantervre. Így kerültek bele minden fejezetbe az elsőfokú függvényről szóló tudnivalók, melyeket természetesen most kihagyunk a számonkérésből.

1. A racionális számok.

1. Két háromjegyű szám összege hány jegyű szám lehet?
2. Két háromjegyű szám különbsége hány jegyű szám lehet?
3. Két kétjegyű szám szorzata hány jegyű szám lehet?
4. Egy négyjegyű és egy kétjegyű szám hányadosa hány jegyű szám lehet?
5. Mikor lesz két természetes szám különbsége pozitív szám? Zérus? Negatív szám?
6. Mikor lesz két természetes szám hányadosa természetes szám? Törtszám?
7. Melyik számokat nevezzük racionális számoknak?
8. Hány racionális számnak a helye van a számegyenesen 0 és 1 között? Melyek azok? Miért nem tudod mindet berajzolni?
9. Hogyan egyszerűsíted a törtet? Miért van szükség a tört egyszerűsítésére?
10. Hogyan bővítheted a törtet? Hogyan hozod a törtet közös nevezőre?
11. Melyik közösleges törtet lehet átírni véges tizedes tört alakra?

12. Hogyan jelöljük röviden a végtelen szakaszos tizedes törteket?
13. Hogyan írjuk át az 1-nél nagyobb közöséges törtet vegyes szám alakra?
14. Hogyan írjuk át a vegyes számokat közöséges tört alakra?
15. Hogyan állapítod meg, hogy melyik a nagyobb
 - a) két természetes szám közül?
 - b) két tizedes tört közül?
 - c) két közöséges tört közül?
 - d) két pozitív szám közül?
 - e) két negatív szám közül?
 - f) egy pozitív és egy negatív szám közül?
16. Melyik számokat jelenti 8, ha a tört számokat egészekre kerekítettük?
17. Algebrában hogy jelölnél két számot, ha az egyik 5-tel nagyobb a másiknál? Hányféleképpen jelölheted?
18. Algebrában hogyan jelölnél két számot, amelynek az összege 20?
19. Algebrában hogyan jelölhetsz két számot, amelyek hányadosa 3? Hányféleképpen jelölheted?
20. Algebrában hányféleképpen jelölhetsz két számot, amelyek szorzata 30?

A téma rövid összefoglalása.

1. A természetes számok végtelen sokan vannak. Nincs köztük legnagyobb. Két természetes szám összege mindig természetes szám.

Például: $714 + 388 = 1102$

Két természetes szám szorzata mindig természetes szám.

Például: $627 \cdot 32 = 20\,064$

Két természetes szám különbsége lehet:

- a) természetes szám Például: $684 - 312 = 362$
- b) zérus Például: $818 - 818 = 0$
- c) negatív egész szám Például: $304 - 729 = -425$

Két természetes szám hányadosa lehet:

- a) természetes szám Például: $36 : 4 = 9$.
- b) törtszám Például: $36 : 5 = 7,2 = 7\frac{1}{5}$

A természetes számokat, törtszámokat, zérust és negatív számokat (egészeket és törteket is) közös szóval racionális számoknak nevezzük.

A racionális számok végtelen sokan vannak. Összegük, különbségük, szorzatuk, hányadosuk mindig racionális szám. (Zérussal nem lehet osztani.)

A racionális számokat számegyenesen ábrázolhatjuk.

2. A törtszámokat több alakban is felírhatjuk, mert lehet egyszerűsíteni és bővíteni.

Egyszerűsítés: $\frac{24}{36} = \frac{12}{18} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

Bővítés: $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{12}{16} = \frac{60}{80} = \dots$

Azokat a törtszámokat, amelyeknek 10, 100, 1000, ... a nevezője, felírhatjuk tizedes tört alakban is.

$$\frac{3}{10} = 0,3 \qquad \frac{37}{100} = 0,37 \qquad \frac{4329}{1000} = 4,329$$

A közöséges törték egy részét úgy bővíteni, vagy egyszerűsíteni, hogy 10, 100, 1000 ... legyen a nevező. Ezekből véges tizedes törték lesznek.

$$\frac{17}{20} = \frac{85}{100} = 0,85 \qquad \frac{14}{20} = \frac{7}{10} = 0,7$$

A többi törték is átírhatók tizedes tört alakra. Ezekből lesznek a végtelen szakaszos tizedes törték.

$$\frac{5}{11} = 0,454545\dots = 0,4\dot{5} \qquad \frac{11}{6} = 1,8333\dots = 1,8\dot{3}$$

Az 1-nél nagyobb törtszámokat felírhatjuk vegyes szám alakban is:

$$\frac{9}{2} = 4\frac{1}{2} \qquad \frac{127}{17} = 7\frac{8}{17} \qquad \frac{400}{3} = 133\frac{1}{3}$$

Az egész számokat is felírhatjuk a közönséges tört alakban.

$$4 = \frac{4}{1} = \frac{8}{2} = \frac{12}{4} = \dots \qquad -7 = -\frac{7}{1} = -\frac{14}{2} = -\frac{21}{3} \dots$$

3. A számok helyett gyakran számolunk a közelítő értékekkel. Ha például $66,68\frac{1}{2}$, $71\frac{4}{7}$, 73,1 stb. számokat 70-re kerekítjük, akkor 70 nem egy számot jejent, hanem 65 és 75 között valamennyi számot.

Végtelen szakaszos tizedes törtek helyett is gyakran számolunk közelítő értékükkel.

Például: 0,121121121... helyett 0,1 vagy 0,12
0,787878... helyett 0,8 vagy 0,79

4. Algebrában a számokat betűkkel jelölhetjük.

a, b, c, ..., x, y, z jelenthetnek egész számot vagy törtszámot, pozitív számot, 0-t vagy negatív számot.

2. Összeadás.

1. Milyen szám az összege két vagy több természetes számnak?
2. Milyen szám az összege két vagy több pozitív számnak?
3. Milyen szám az összege két vagy több negatív számnak?
4. Melyik szám hozzáadásakor nem változik a szám értéke?
5. Milyen szám lehet az összege két vagy több törtszámnak?
6. Mikor lehet törtszámok összege egész szám?
7. Milyen szám lehet az összege pozitív és negatív számoknak?
8. Mikor lesz racionális számok összege zérus?
9. Mikor szükséges összeadás előtt a törteket bővíteni?
10. Hányféleképpen adhat sz össze közönséges törtet tizedes törttel?
11. Mit kell tenned, ha a feladatban az összeadandó tagok közül az egyik centiméterben, a másik méterben, a harmadik deciméterben van megadva?
12. Mikor lesz az összeg nagyobb a tagoknál?
13. Mikor lesz az összeg kisebb, mint az egyik tag?
14. Mikor lesz az összeg kisebb, valamennyi tagnál?
15. Írd fel képlettel az összeadás felcserélési tulajdonságát! Fogalmazd meg képlet nélkül is! Magyarázd meg, miért azonosság!
16. Írd fel képlettel az összeadás csoportosítási tulajdonságát! Fogalmazd meg képlet nélkül is! Magyarázd meg, miért azonosság!
17. Írd fel képlettel az összeg hozzáadásának szabályát! Fogalmazd meg képlet nélkül is! Miért azonosság ez?
18. Írd fel képlettel a különbség hozzáadásának szabályát! Fogalmazd meg képlet nélkül is! Miért azonosság?
19. Betűkkel jelölt mennyiségek közül melyeket tudod összeadni? Miért kapsz ilyenkor azonosságot?
20. Hogyan oldod meg azokat az egyenleteket, amelyekben egynemű mennyiségeket találasz?
21. Milyen szög lehet két hegyesszög összege? Két tompaszög összege? Egy derékszög és egy hegyesszög összege? Egy hegyesszög és egy tompaszög összege? Három hegyesszög összege?
22. Hogyan szerkeszted meg két hegyesszög összegét?
23. Hogyan szerkeszted meg két szakasz összegét?
24. Hogyan számítod ki a háromszög, négyszög, ötszög... kerületét? Melyeknél lehet összeadás helyett szorzással számolni?

A téma rövid összefoglalása.

$$1. \quad 374 + 248 = 622$$

$$427 + (-188) = 239$$

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{5} = \frac{10}{15} + \frac{9}{15} = \frac{19}{15} = 1\frac{4}{15}$$

$$1\frac{5}{8} + 3\frac{7}{12} = 4 + \frac{15}{24} + \frac{14}{24} = 5\frac{5}{24}$$

$$4,8 + 3\frac{1}{3} = 7 + \frac{4}{5} + \frac{1}{3} = 7 + \frac{12}{15} + \frac{5}{15} = 8\frac{2}{15}$$

A racionális számok összege mindig racionális szám. Ha egy számhoz pozitív számot adunk hozzá, az összeg nagyobb lesz. Ha egy számhoz negatív számot adunk hozzá, az összeg kisebb lesz.

$$10 + 4 = 14$$

$$10 + 6\frac{1}{3} = 16\frac{1}{3}$$

$$10 + 8\frac{2}{3} = 18\frac{2}{3}$$

$$10 + 11 = 21$$

$$10 + 4 = 14$$

$$10 + 1,5 = 11,5$$

$$10 + (-1) = 9$$

$$10 + (-3,5) = 6,5$$

Ha az egyik összeadandó tagot csökkentjük, az összeg nagyobb lesz.

Ha az egyik összeadandó tagot csökkentjük, az összeg kisebb lesz.

Ábrázoljuk, hogyan változik az összeg, ha 10-hez különböző számokat adunk!

Az összeg az összeadandó tagoknak a függvénye: $y = 10 + x$

2. Az összeadás azonosságai:

Az összeadandó tagokat felcserélhetjük:

$$4 + 5 = 5 + 4 \quad \frac{2}{3} + (-0,5) = (-0,5) + \frac{2}{3} \quad a + b = b + a$$

Az összeadandó tagokat tetszés szerint csoportosíthatjuk:

$$(8 + 1,3) + \frac{4}{5} = 8 + (1,3 + \frac{4}{5}) \quad (a + b) + c = a + (b + c)$$

Összeget kétféleképpen is hozzáadhatunk egy számhoz:

$$34 + (26 + 14) = 34 + 40 = 74$$

$$34 + (26 + 14) = 60 + 14 = 74$$

Betűjelöléssel: $a + (b + c) = (a + b) + c$

Különbséget kétféleképpen is hozzáadhatunk egy számhoz:

$$48 + (32 - 18) = 48 + 14 = 62$$

$$48 + (32 - 18) = 80 - 18 = 62$$

Betűjelöléssel: $a + (b - c) = (a + b) - c$

3. Algebrában legtöbbször csak jelölni tudjuk az összeadást:

$$3a + 2b + (-ab) + a^2 + (-4,2)$$

Az egynemű tagokat azonban össze lehet adni:

$$4x + 3 + 5x + x^2 + 7 + (-3x) + 0,6 = x^2 + 6x + 10,6$$

4. Három almafán másfél mázsa alma termett. Az elsőről 3 kosár és 8 kg, a másodiktól 3 kg-mal kevesebb, mint 4 kosár, a harmadiktól 3 kosár és 5 kg almát szedtünk. Hány kilogramm fér egy kosárba?

Megoldás következtetéssel:

10 kosárból 3 kg hiányzik (második fa), de 13 kg felesleges is van. Pótolva a 3 kg hiányt, van 10 kosár és 3 kg almánk, ez 150 kg. 10 kosár alma 140 kg, 1 kosár alma 14 kg.

Megoldás egyenlettel:

3. Kivonás.

$$\begin{aligned}(3x + 8) + (4x - 3) + (3x + 5) &= 150 \\ 3x + 8 + 4x - 3 + 3x + 5 &= 150 \\ 10x + 10 &= 150 \\ 10x &= 140 \\ x &= 14\end{aligned}$$

1. Két természetes szám különbsége milyen szám lehet?
2. Két negatív szám különbsége milyen szám lehet?
3. Milyen számot kapunk, ha pozitív számból negatív számot vonunk ki?
4. Milyen számot kapunk, ha negatív számból pozitív számot vonunk ki?
5. A kivonásnak miért nincs meg a felcserélési tulajdonsága?
6. Melyik szám kivonásakor nem változik a szám?
7. Milyen szám lehet két törtszám különbsége?
8. Mikor lesz két törtszám különbsége egész szám?
9. Mikor lesz két szám különbsége zérus?
10. Mikor szükséges kivonás előtt bővíteni a törtet?
11. Hányféleképpen vonhatsz ki közöséges törtből tizedes törtet? Tizedes törtből közöséges törtet?
12. Mit kell tenned, ha a kisebbítendő literben, a kivonandó deciliterben van megadva?
13. Mikor lesz a különbség nagyobb a kisebbítendőnél?
14. Mikor lesz a különbség nagyobb a kisebbítendőnél?
15. Mikor lesz a különbség nagyobb a kisebbítendőnél is, a kivonandónál is?
16. Írd fel képlettel az összeg kivonásának a szabályát! Fogalmazd meg képlet nélkül is! Magyarázd meg, hogy miért azonosság!
17. Írd fel képlettel a különbség kivonásának szabályát! Fogalmazd meg képlet nélkül is! Magyarázd meg, miért azonosság!
18. Hogyan végzed el az összevonást algebrai kifejezésekben?
19. Hogyan távolítod el a zárójelet, ha negatív előjel áll előtte?
20. Hogyan oldod meg az egyenleteket, amelyekben egyenmű algebrai kifejezések szerepelnek?
21. Milyen szög lehet két hegyesszög különbsége? Két tompaszög különbsége? Egy derékszög és egy hegyesszög különbsége? Egy tompaszög és egy hegyesszög különbsége?
22. Hogyan szerkeszted meg két szög különbségét?
23. Hogyan szerkeszted meg két szakasz különbségét?

A téma rövid összefoglalása:

$$1. \quad 415 - 124 = 291$$

$$328 - (-112) = 440$$

$$\frac{3}{4} - \frac{5}{11} = \frac{33}{44} - \frac{20}{44} = \frac{13}{44}$$

$$7\frac{4}{5} - 1\frac{1}{3} = 6\frac{4}{5} - \frac{1}{3} = 6\frac{12}{15} - \frac{5}{15} = 6\frac{7}{15}$$

$$5,8 - 2\frac{1}{7} = 3,8 - \frac{1}{7} = 3\frac{4}{5} - \frac{1}{7} = 3\frac{28}{35} - \frac{5}{35} = 3\frac{23}{35}$$

Racionális számok különbsége mindig racionális szám. Ha egy számból pozitív számot vonunk ki, a különbség kisebb lesz. Ha egy számból negatív számot vonunk ki, a különbség nagyobb lesz.

$$\begin{aligned}2. \quad 10 - 7 &= 3 \\ 11,5 - 7 &= 4,5 \\ 13 - 7 &= 6 \\ 10 - 7 &= 3 \\ 7,5 - 7 &= 0,5 \\ 5 - 7 &= -2\end{aligned}$$

Ha a kisebbítendőt növeljük,
a különbség nagyobb lesz.

Ha a kisebbítendőt csökkentjük,
a különbség kisebb lesz.

Ábrázoljuk, hogyan változik
a különbség, ha különböző
számokból vonjuk ki a 7-et.

A különbség függvénye a kivonandónak: $y = x - 7$

$$\begin{array}{rcl} 3. & 8 - & 3,5 = 4,5 \\ & 8 - & 7 = 1 \\ & 8 - & 10,5 = -2,1 \end{array}$$

Ha a kivonandót növeljük,
a különbség csökken.

$$\begin{array}{rcl} & 8 - & 3,5 = 4,5 \\ & 8 - & 1 = 7 \\ & 8 - (-1,5) = & 9,5 \end{array}$$

Ha a kivonandót csökkentjük,
a különbség növekszik

Ábrázoljuk, hogyan
változik a különbség,
ha különböző számokat
vonunk ki a 8-ból?

A különbség függvénye a kivonandónak: $y = 8 - x$

4. A kivonás azonosságai:

Összeget kétféleképpen vonhatunk ki egy számból:

$$68 - (37 + 21) = 62 - 58 = 10$$

$$68 - (37 + 21) = 31 - 21 = 10$$

Betűjelöléssel: $a - (b + c) = (a - b) - c$

Különbséget kétféleképpen vonhatunk ki egy számból:

$$79 - (45 - 20) = 79 - 25 = 54$$

$$79 - (45 - 20) = 34 + 20 = 54$$

Betűjelöléssel: $a - (b - c) = (a - b) + c$

5. Algebrában a kivonás helyett összeadást szoktunk végezni.

(Pozitív szám kivonása helyett negatív számot adunk hozzá, negatív szám kivonása helyett pozitív számot adunk hozzá.) Összevonásnak nevezzük.

$$3x - 6 - (-5x) + 7 + (-2x) = 3x - 6 + 5x + 7 - 2x = 6x + 1$$

Csak egynemű tagokat vonhatunk össze.

Bármelyik számot helyettesítünk x helyébe, az egyenlőség fennáll.

Az összevonás is azonosság.

6. A gyárba 16 vagon és 85 mázsa nyersanyag érkezett. Az első héten felhasznált 7 vagonból csak 12 mázsa maradt meg. Hány mázsa volt egy vagon, ha 1402 mázsa nyersanyag maradt feldolgozatlanul?

Megoldás következtetéssel:

16 vagon nyersanyagból 7 vagonnal feldolgoztak, maradt 9 vagon. A 85 mázsa a 12 mázsa maradékkal 97 mázsa lett. 9 vagon és 97 mázsa nyersanyag 1407 mázsa, 9 vagon, 1305 mázsa. Egy vagon 145 mázsa.

Megoldás egyenlettel:

$$(16x + 85) - (7x - 12) = 1402$$

$$16x + 85 - 7x + 12 = 1402$$

$$9x + 97 = 1402$$

$$9x = 1305$$

$$x = 145$$

4. A szorzás

1. Mit jelent 5-tel szorozni? Mit jelent $\frac{3}{5}$ -del szorozni?

2. Hogyan állapítod meg a szorzat előjelét? Magyarázd meg!

3. Milyen szám két vagy több természetes szám szorzata?

4. Milyen szám lehet három egész szám szorzata? Mikor lesz pozitív? Mikor lesz negatív?

5. Mikor lehet két törtszám szorzata egész szám?

6. Mikor lehet racionális számok szorzata zérus?

7. Mikor lesz két racionális szám szorzata nagyobb, mindkét tényezőnél?

8. Mikor lesz két racionális szám szorzata az egyik tényezőnél kisebb, a másik tényezőnél nagyobb?

9. Mikor lesz két racionális szám szorzata kisebb mindkét tényezőnél?

10. Mekkora számot kell 1,1-del megszorozni, hogy a szorzat kisebb legyen a számnál?

11. Mekkora számmal kell egy számot megszorozni, hogy értéke ne változzék meg?

12. Mekkora számmal kell egy pozitív számot megszorozni, hogy értéke tízszeresére növekedjék? Tizedrésére csökkenjen?

13. Hogyan szorzunk össze két közönséges törtszámmat? Magyarázd meg, miért!

14. Hogyan szorzunk össze két tizedes törtet? Magyarázd meg, miért!

15. Hányféleképpen szorozhatunk össze egy közönséges és egy tizedes törtet?

16. Mikor kapsz csak az egyik esetben pontos értéket?

17. Hogyan változik a szorzat abszolút értéke, ha

a) egyik tényezőt kétszeresére, másikat háromszorosára növeled!

b) egyik tényezőt felére, másikat ötödrésztére csökkented!

c) egyik tényezőt kétszeresére növeled, másikat felére csökkented!

18. Írd fel képlettel a szorzás felcserélési tulajdonságát! Fogalmazd meg képlet nélkül is! Magyarázd meg, hogy miért azonosság!

19. Írd fel képlettel a szorzás csoportosítási tulajdonságát! Fogalmazd meg képlet nélkül is! Magyarázd meg, hogy miért azonosság!

20. Hogyan szorzol meg egy szorzatot egy számmal? Magyarázd meg, miért?

21. Hogyan szorzol meg egy összeget egy számmal? Magyarázd meg miért!

22. Hogyan szorzol meg egy különbséget egy számmal? Magyarázd meg, hogy miért!

23. Melyik hegyesszögek azok, amelyeknek a kétszerese is hegyesszög? Háromszorosa is az? Négyeszerese is az? Tízszere is az?

24. Melyik hegyesszögek azok, amelyeknek a kétszerese még hegyesszög, de a háromszorosa már tompaszög?

25. Hogyan szerkeszted meg egy szög háromszorosát?

26. Hogyan szerkeszted meg egy szakasz háromszorosát?

27. Melyek azok a területszámítási képletek, amelyekben csak szorozni kell? Amelyekben a szorzáson kívül más műveleteket is kell végezni?

28. Melyek azok az idomok, amelyeknek a kerületét csak szorzással is kiszámíthatod?

29. Melyek azok a felszínszámítási képletek, amelyekben csak szorozni kell?

30. Melyek azok a testek, amelyeknek a térfogatát csak szorzással ki tudod számítani?

31. Hányféleképpen tudod kiszámítani az alapszámából a százaléktértéket?

32. Mi a magyarázata annak, hogy egy szorzással is ki tudod számítani a százaléktértéket?

33. Mekkora számmal kell szoroznod, ha százalékkal nagyobbított értéket akarsz kiszámítani?

34. Hogyan távolítod el az egyenletből a zárójelet, ha $(+3)$ szorzótényező áll előtte? És ha (-4) a szorzótényező?

35. Hogyan oldod meg egyenlettel az arányos osztási feladatokat?

A téma rövid összefoglalása

1. Természetes számmal való szorzás sorozatos összeadást jelent. $\frac{2}{3}$ -dal szorozni annyit jelent, mint kiszámítani egy szám $\frac{2}{3}$ részét.

Egyenlő előjelű számok szorzata pozitív. Különböző előjelű számok szorzata negatív.
 $37 \cdot 29 = 1073$ $(-44) \cdot 17 = (-748)$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{2}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{11}{4} \cdot \frac{7}{2} = \frac{77}{8} = 9\frac{5}{8}$$

$$6,2 \cdot 3\frac{1}{6} = \frac{62}{10} \cdot \frac{19}{6} = \frac{1178}{60} = 19$$

Racionális számok szorzata mindig racionális szám. Ha egy számot 1-nél nagyobb számmal szorzunk, a szorzat nagyobb lesz. Ha egy számot 1-nél kisebb számmal szorzunk, a szorzat kisebb lesz.

$$\begin{array}{lcl}
2. & 4 \cdot & 2,5=10 \\
& 4 \cdot & 4=16 \\
& 4 \cdot & 5,5=22 \\
& 4 \cdot & 2,5=10 \\
& 4 \cdot & 1=4 \\
& 4 \cdot & (-0,5)=(-2)
\end{array}$$

Ha egy pozitív számot egyre nagyobb számmal szorzunk meg, a szorzat nő.

Ha egy pozitív számot egyre kisebb számmal szorzunk meg, a szorzat csökken.

Ábrázoljuk, hogyan változik a szorzat, ha 4-et különböző számokkal szorzunk meg!

A szorzat a tényezők függvénye: $y=4x$

$$\begin{array}{lcl}
(-3) \cdot & 3= & (-9) \\
(-3) \cdot & 5= & (-15) \\
(-3) \cdot & 7= & (-21) \\
(-3) \cdot & 3= & (-9) \\
(-3) \cdot & 1= & (-3) \\
(-3) \cdot & (-1)+ & (+3)
\end{array}$$

Ha egy negatív számot egyre nagyobb számmal szorozzuk meg, a szorzat csökken.

Ha egy negatív számot egyre kisebb számmal szorozzuk meg, a szorzat nő.

Ábrázoljuk, hogyan változik a szorzat, ha (-3) -at különböző számokkal szorozzuk meg!

A szorzat a tényező függvénye: $y=-3x$

3. A szorzás azonosságai

A tényezőket felcserélhetjük:

$$8 \cdot 7 = 7 \cdot 8 \quad \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot 1,2 = 1,2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \quad ab = ba$$

A tényezőket tetszés szerint csoportosíthatjuk:

$$\left(6 \cdot \frac{5}{7}\right) \cdot 2,3 = 6 \cdot \left(\frac{5}{7}\right) \cdot 2,3 \quad (ab) \cdot c = a \cdot (bc)$$

Amikor szorzatot akarunk megszorozni egy számmal, a két tényező közül csak az egyiket kell megszoroznunk.

$$6 \cdot (5 \cdot 9 = 30 \cdot 9) \quad 3 \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}\right) = \frac{3}{4} \cdot 2$$

$$4 \cdot (3x) = 12x$$

$$a \cdot (5a) = 5a^2$$

Amikor összeget akarunk megszorozni egy számmal, az összeg minden tagját végig kell vele szoroznunk.

$$4 \cdot (20 + 3) = 80 + 12$$

$$5 \cdot (2x + 7) = 10x + 35$$

Amikor különbséget akarunk megszorozni egy számmal, a kisebbítendőt is, a kivonandót is meg kell vele szoroznunk.

$$6 \cdot (30 - 1) = 180 - 6$$

$$x \cdot (3x - 4) = 3x^2 - 4x$$

4. Az iskolába 475 tanuló jár. 84%-uk úttörő. Hány úttörője van az iskolának?

$$\text{Megoldás: } 475 \cdot 0,84 = 399$$

Megoldhatjuk következtetéssel is. Felírhatjuk egyenlettel is!

Az iskolában tantermenként 3 kosár és 8 kg szenet tüzelünk el, az irodában két kosár és 4 kg szén fogy el. Az összes fogyasztás 8 tanteremre és az irodára 3,8 mázsa. Mennyi szén van egy kosárban?

Megoldás egyenlet nélkül:

A tantermekben 24 kosár és 64 kg, az irodákban 2 kosár és 4 kg fogy el. 26 kosár és 68 kg együtt 380 kg. 26 kosár 312 kg. 1 kosár 12 kg.

Megoldás egyenlettel:

$$8 \cdot (3x + 8) + (2x + 4) = 380$$

$$24x + 64 + 2x + 4 = 380$$

$$26x + 68 = 380$$

$$26x = 312$$

$$x = 12$$

A háromszög oldalainak aránya $2 : 3 : 4$. A kerülete 54 cm. Mekkora egy oldala?

Megoldás arányos osztással:

9 részre osztjuk a kerületet: $54 : 9 = 6$

Az első oldal $2,6 = 12$ cm, a második $3,6 = 18$ cm, a harmadik: $4,6 = 24$ cm.

Megoldás egyenlettel:

$$2x + 3x + 4x = 54$$

$$9x = 54$$

$$x = 6$$

$$2x = 12$$

$$3x = 18$$

$$4x = 24$$

5. Osztás

1. Mit jelent 8 -cal osztani? $\frac{4}{5}$ -del osztani?
2. Hogyan állapítod meg a hányados előjelét? Magyarázd meg!
3. Miért nincs maradékos osztás, ha a törtszámokat is ismerjük?
4. Mikor kapunk természetes számok hányadosát?
 - a) természetes számot?
 - b) véges tizedestörtet?
 - c) végtelen szakaszos tizedestörtet?
5. Mikor lesz a hányados kisebb az osztandónál?
6. Mikor lesz a hányados nagyobb az osztandónál?
7. Mikor lesz a hányados kisebb az osztónál?
8. Mikor lesz a hányados nagyobb az osztónál?
9. Mikor lesz a hányados egyenlő az osztóval?
10. Mikor lesz a hányados zérus?
11. Miért nem lehet zérussal osztani?
12. Mikor lehet két törtszám hányadosa egész szám?
13. Hogyan osztunk el egymással két közösleges törtszámot? Miért?
14. Hogyan osztunk el egymással két tizedes törtet? Miért?
15. Hogyan állapítod meg egy tizedes tört reciprok értékét?
16. Hányféleképpen oszthatasz el egy közösleges törtet tizedes törttel? Tizedes törtet közösleges törttel? Mikor nem ad az egyik eljárás pontos hányadosot?
17. Mit kell tenned, ha az osztandó forintban van megadva, az osztó pedig fillérben?
18. Írd fel képlettel a szorzat osztásának szabályát! Fogalmazd meg képlet nélkül is! Magyarázd meg, hogy miért azonosság ez!
19. Írd fel képlettel az összeg osztásának szabályát! Fogalmazd meg képlet nélkül is! Magyarázd meg, miért azonosság ez!
20. Írd fel képlettel a különbség osztásának szabályát. Fogalmazd meg képlet nélkül is. Magyarázd meg, miért azonosság!
21. Hogyan felezel, negyedelsz egy szöveget?
22. Hogyan felezel, negyedelsz egy szakaszt?
23. Hogyan osztasz fel egy szakaszt n egyenlő részre?
24. Hogyan osztasz fel egy szakaszt $3 : 5$ arányban?
25. Miért lehet osztás helyett az osztó reciprok értékével szorozni?
26. Mivel helyettesítheted az $\frac{1}{5}$ -del való osztást?
27. Hányféleképpen tudod kiszámítani a százaléktételekből az alapszámot?
28. Miért tudod egyetlen osztással kiszámítani a százaléktételekből az alapszámot?
29. Ha százalékkal növelt értékből számítod ki az alapszámot, mekkora számmal kell osztanod? Nagyobb vagy kisebb lesz az alapszám?
30. Hogyan oldod meg azokat az egyenleteket, amelyekben törtszámok is vannak?
31. Mire kell vigyáznod, ha az egyenletben egy negatív előjelű tört számlálója összeg vagy különbség?

A téma rövid összefoglalása

1. $34 : 4$ azt jelenti, hogy a 32 -t négy egyenlő részre osztjuk; azt is jelenti, hogy meg-nézzük, 32 -ben hányszor van meg a 4 .

$20 : \frac{2}{3}$ azt jelenti, hogy megkeressük azt a számot, amelynek $\frac{2}{3}$ része 20 . Egyenlő elő-jelű számok hányadosa pozitív, különböző előjelű számok hányadosa negatív.

$$432 : 12 = 36$$

$$47 : 5 = 9,4$$

$$288 : (-16) = (-18)$$

$$49 : 11 = 4,45$$

$$\frac{3}{4} : \frac{4}{5} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} = \frac{15}{16}$$

$$5,4 : 1\frac{1}{3} = \frac{54}{10} : \frac{4}{3} = \frac{54}{10} \cdot \frac{3}{4} = \frac{162}{40} = 4\frac{1}{20}$$

Racionális számok hányadosa mindig racionális szám, de zérussal nem lehet osztani. Két természetes szám osztásakor sem kell maradékot hagynunk: véges vagy végtelen szakaszos tizedes tört lesz a hányados.

$$2. \quad \begin{aligned} 6 : 6 &= 1 \\ 12 : 6 &= 2 \\ 18 : 6 &= 3 \\ 6 : 6 &= 1 \end{aligned}$$

Ha nagyobb számot osztunk el 6-tal, nagyobb lesz a hányados.

$$2 : 6 = \frac{1}{3}$$

Ha kisebb számot osztunk el 6-tal, kisebb lesz a hányados.

$$(-2) : 6 = \left(-\frac{1}{3}\right)$$

Ábrázoljuk, hogyan változik a hányados, ha különböző számokat osztunk el 6-tal.

A hányados függvénye az osztandónak: $y = \frac{x}{6}$

$$3. \quad \begin{aligned} 12 : 6 &= 2 \\ 12 : 4 &= 3 \\ 12 : 2 &= 6 \end{aligned}$$

Ha egy pozitív számot egyre kisebb pozitív számmal osztunk el, a hányados nő.

$$\begin{aligned} 12 : 6 &= 2 \\ 12 : 12 &= 1 \end{aligned}$$

Ha egy pozitív számot nagyobb pozitív számmal osztunk el, a hányados csökken.

$$12 : 18 = \frac{2}{3}$$

Ábrázoljuk, hogyan változik a különbség, ha 12-t különböző pozitív számokkal osztjuk el.

A hányados függvénye az osztónak: $y = \frac{12}{x}$

A függvény képe görbe vonal. A függvény nem lineáris.

4. Az osztás azonosságai.

Szorzat osztásakor csak az egyik tényezőt kell osztani.

$$(12 \cdot 10) : 3 = 4,10$$

$$(12 \cdot 10) : 5 = 12,2$$

$$(6x^2) : 3 = 2x^2$$

$$(6x^2) : x = 6x$$

Összeg osztásakor mindkét tagot el kell osztani. Kétféleképpen oszthatjuk el:

$$(60 + 8) : 2 = 68 : 2 = 34$$

$$(60 + 8) : 2 = 30 + 4 = 34$$

$$\text{Betűjelzéssel: } \frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

Különbség osztásakor a kisebbítendőt is, a kivonandót is el kell osztani. Kétféleképpen oszthatjuk el:

$$(48 - 9) : 3 = 39 : 3 = 13$$

$$(48 - 9) : 3 = 16 - 3 = 13$$

$$\text{Betűjelzéssel: } \frac{a-b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}$$

5. A 3-mal való osztás helyett gyakran mondjuk azt, hogy $\frac{1}{3}$ -dal szorzunk. A $\frac{2}{5}$ -del való osztás helyett $\frac{5}{2}$ -del szorzunk. Az osztást gyakran helyettesíthetjük reciprok értékkel való szorzással.

6. Almatermésünk 23%-át, 105,8 mázsa almát exportálunk. Mennyi almánk termett?

Megoldás: $105,8 : 0,23 = 460$

Megoldhatjuk következtetéssel is, egyenlettel is.

A gyümölcszedést az egyik brigád 20 nap alatt, a másik 30 nap alatt végezné el. Mennyi idő alatt végzik el együtt?

Megoldás egyenlet nélkül:

Egy nap alatt elvégzik a munka $\frac{1}{20} + \frac{1}{30} = \frac{3}{60} + \frac{2}{60} = \frac{5}{60} = \frac{1}{12}$ részét.

12 nap alatt elvégzik az egész munkát.

Megoldás egyenlettel:

$$\frac{x}{20} + \frac{x}{30} = 1$$

$$30x + 20x = 600$$

$$50x = 600$$

$$x = 12$$

Szőlőtermésünkéből 12 mázsát gyümölcsként értékesítettünk. A maradék negyedrészt a tagság kapta meg, a többi 171 mázsából must lett. Mennyi szőlőnk termett?

Megoldás egyenlet nélkül:

A tagság a 171 mázsa harmadrészét kapta, 57 mázsát.

$$171 + 57 + 12 = 240 \text{ mázsa.}$$

Megoldás egyenlettel:

$$x - 12 - \frac{x - 12}{4} = 171$$

$$4x - 48 - (x - 12) = 684$$

$$4x - 48 - x + 12 = 684$$

$$3x - 36 = 648$$

$$3x = 720$$

$$x = 240$$

6. Feladatmegoldások

1. Ismered két szám összegét és különbségét. Hogyan számítd ki a két számot egyenlet nélkül? Hányféleképpen tudod kiszámítani?

2. Hogyan tudod a feladatot egyenlettel megoldani? Hányféleképpen állíthatod fel?

3. Hogyan tudod a feladatot függvényábrázolással megoldani?

4. Két mennyiség egyenes arányosságban van egymással. Ismered az egyiket, hogyan számítd ki a másikat egyenlet nélkül? Egyenlettel? Függvény ábrázolásával? Készíts ilyen feladatot!

5. Ismered két mennyiség összegét és arányát. Hogyan számítd ki egyenlet nélkül a két mennyiséget? Egyenlettel? Függvény ábrázolásával? Készíts ilyen feladatot!

6. Ismered két mennyiség különbségét és arányát. Hogyan számítd ki a két mennyiséget egyenlet nélkül? Egyenlettel? Függvény ábrázolásával? Készíts ilyen feladatot!

7. Két mennyiség fordított arányosságban van egymással. Ismered az egyiket. Hogyan számítd ki a másikat egyenlet nélkül? Egyenlettel? Miért nem tudod függvény ábrázolással is kiszámítani?

8. Milyen mennyiségeket ismersz a százalékszámításban? Kettő megvan adva. Hogyan számítd ki a harmadikat következtetéssel? Szorzással vagy osztással? Hogyan írod fel az egyes feladatokat egyenlet formájában?

9. Tudod, hogy egy munkát több ember külön-külön mennyi idő alatt végez el. Hogyan számítd ki, hogy együtt mennyi idő alatt végzik el? Hogyan számolsz egyenlet nélkül? Egyenlettel? Függvényábrázolással? (Ábrázold az egyenlet baloldalát, mint függvényt! Gondolkozz tovább!)

10. Hogyan írsz fel egy kétjegyű számot betűjelöléssel? Készíts olyan egyenletet, ahol kétjegyű szám jegyeit felcseréljük! Hogyan oldod meg az egyenletet?

11. Miből készíted el az egyenlőséget azoknál a mozgási egyenleteknél, amelyeknél szemben mozognak a járművek? Hogyan oldod meg az egyenlet nélkül az ilyen feladatokat? Hogyan oldod meg függvényábrázolással?

12. Miből készíted el az egyenlőséget azokban a mozgási egyenletekben, amelyeknél egy irányban mozognak a járművek? Hogyan oldod meg egyenlet nélkül? Hogyan oldod meg függvényábrázolással?

13. Hogyan írod fel az egyenlőséget, ha körpályán két futó szemben fut egymással? Ha egyirányban futnak és a gyorsabbik lekörözi a társát?

14. Milyen fizikai törvények felhasználásával tudsz egyenleteket felírni? Sorold el mind-egykélt, hogyan állítod elő az egyenlőséget!

15. Mi marad változatlan, amikor oldatot hígítunk? Hogyan állítod fel ennek alapján az egyenletet?

16. Hogyan állítod fel az egyenletet, ha oldatokat keverünk?

17. Hogyan oldod meg függvény ábrázolásával azokat az egyenleteket, amelyeknek csak az egyik oldalán van ismeretlen? Magyarázd meg, miért!

18. Hogyan oldod meg függvény ábrázolásával azokat az egyenleteket, amelyeknek mindkét oldalán szerepel az ismeretlen? Magyarázd meg, miért!

19. Mit tudsz arról a két mennyiségről, amelyek összefüggését $y = x + 5$ függvény fejezi ki? És amelyikét $y = x - 3$ függvény? És amelyikét $y = 8 + x$ függvény fejezi ki?

20. Mit tudsz arról a két mennyiségről, amelyeknek összefüggését $y = 2x$ függvény fejezi ki? És amelyikét $y = \frac{x}{6}$ függvény? És amelyikét $y = \frac{2}{3}x$ függvény fejezi ki?

21. Mit tudsz arról a két mennyiségről, amelyek összefüggését $y = 4x + 5$ függvény fejezi ki? És amelyikét $y = 2x - 3$ függvény? És amelyikét $y = 10 - 3x$ függvény?

22. Hogyan tudnád felírni függvényvel a Ft és a fillér összefüggését? A literét és deciliterét? A méterét és centiméterét? A napét és az óráét? A kilogrammát és a grammát? Az óráét és a percét? A kilométerét és a méterét? Válogasd ki közülük azokat, amelyeknek ugyanaz a függvénye!

A téma rövid összefoglalása

1. Béla 400 métert fut. 47 másodperc múlva 9,9 méterrel van a cél előtt. Másodpercenként mekkora utat tesz meg?

Megoldás egyenlet nélkül:

47 másodperc alatt Béla 390,1 méter fut. $1 \text{ másodperc alatt } 390,1 : 47 = 8,3$ métert.

Megoldás egyenlettel:

$$47x + 9,9 = 400$$

$$47x = 390,1$$

$$x = 8,3$$

Megoldás függvény ábrázolásával:

$$y = 47x + 9,9$$

Ugyanennek a függvénynek az ábrázolásával meg tudjuk oldani mindazokat az egyenleteket, amelyeknek az egyik oldalán $47x + 9,9$ áll, a másik oldalán egy adott szám.

$$47x + 9,9 = 375,5$$

$$x = 7,8$$

$$47x + 9,9 = 306$$

$$x = 6,3$$

2. Marci szekéren megy a városba, sebessége 9 km/óra. Visszafelé kerékpáron jön 16 km/óra sebességgel. Meddig tartott az út külön a városba és külön vissza, ha oda-vissza öt órát volt úton?

Megoldás egyenlet nélkül:

A sebesség és az idő fordítottan arányosak egymással. Az 5 órát 9 : 16 arányban felosztani.

$$5 : 25 = 0,2$$

$$9 \cdot 0,2 = 1,8$$

$$16 \cdot 0,2 = 3,2$$

A városba szekéren 3,2 óráig tartott az út, vissza kerékpáron 1,8 óráig.

Megoldás egyenlettel:

$$16x = (5 - x) \cdot 9$$

$$16x = 45 - 9x$$

$$25x = 45$$

$$x = 1,8$$

Megoldás függvények ábrázolásával:

$$y = 16x$$

$$y = 45 - 9x$$

Kelemen Jánosné